INVITATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ALGÉBRIQUES

GUILLAUME CHÈZE, JEAN-CLAUDE YAKOUBSOHN

Abstract. Dans ces quelques pages nous allons essayer de présenter quelques problèmes liés à la résolution des équations différentielles algébriques.

1. D'où viennent les DAE?

1.1. **Une approche mathématiques.** Dans certains livres ou polycopié de mathématiques traitant d'équations différentielles nous pouvons lire:

"Une équation différentielle est une égalité de la forme :

$$(\star)\ F(t, x, \dot{x}) = 0.$$

Une solution de l'équation $(\star)$ est une fonction x vérifiant $F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0$."

Une fois les définitions posées l'auteur s'empresse de dire que dans ce cours il n'étudiera que le cas simple des équations différentielles ordinaires qui sont du type: $\dot{x} = f(t, x)$. Pourquoi?
Souvent la réponse donnée est: "L'étude de l'équation $(\star)$ sort du cadre de ce cours".

Ici, l'objectif de ce cours est de résoudre l'équation $(\star)$.

Définition 1. Une équation différentielle algébrique est une équation de la forme:

$$(\star)\ F(t, x, \dot{x}) = 0,$$

où $F : I \times U_x \times U_{\dot{x}} \to \mathbb{C}^m$, $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle compact, U_x, $U_{\dot{x}} \subset \mathbb{C}^n$ sont des ouverts, et $m, n \in \mathbb{N}$.
Une solution de l'équation $(\star)$ est une fonction dérivable x vérifiant

$$F(t, x(t), \dot{x}(t)) = 0, \text{ pour tout } t \in I.$$

On commencera par étudier les DAE (Diferrential Algebraic Equations) dans le cas le plus simple : le cas linéaire à coefficients constants.
Dans ce cas l'équation $(\star)$ devient:

$$E\dot{x} = Ax + f(t).$$

Autrement dit, nous savons déjà résoudre des ODE du type $\dot{x} = Ax + f(t)$ où A est une matrice. Que se passe-t-il si nous avons dans le membre de gauche $E\dot{x}$ à la place de $\dot{x}$, avec E une matrice?

Key words and phrases. équations différentielles, méthodes numériques, théorèmes des fonctions implicites, méthode de Runge-Kutta, méthode de Newton, α-théorie, existence de dieu .

Naturellement nous avons envie de multiplier cela par E^{-1}. Mais si E n'est pas inversible, que faire?

Nous apporterons une réponse complète à ce problème dans le premier chapitre de ce cours.
Dans la suite du cours nous parlerons évidemment du cas général, et de méthodes numériques pour résoudre les DAE. Cela sera l'occasion de voir des résultats profonds sur les méthodes à un pas (Runge-Kutta), multi-pas (BDF), ainsi que sur la méthode de Newton (α-théorie).

A présent au lieu d'entrer dans le détail du cours proposé nous allons expliquer d'où viennent les DAE et quels genres de problèmes se présentent lors de la résolution de telles équations.

1.2. **Électricité.** Un premier exemple simple où les DAE apparaissent naturellement est l'étude des circuits électriques.
On considère un circuit électrique comportant comme composants des bobines, des résistances et des condensateurs. L'objectif est d'étudier l'intensité et la tension dans un tel circuit.
Rappelons les relations entre la tension et l'intensité:

- Pour une résistance R: $u = Ri$.
- Pour un condensateur de capacité C: $i = C\dot{u}$.
- Pour une bobine d'inductance L: $u = L\dot{i}$.

Ensuite nous considérons le circuit électrique comme un graphe où les nœuds sont les composants (résistance, bobine, ou condensateur) et les branches sont les branchements du circuit électrique. Les lois de Kirchoff nous permettent alors de mettre en équations l'état de ce système électrique.
Première loi de Kirchoff (Loi des nœuds) : En tout nœud d'un circuit, et à tout instant, la somme des courants qui arrivent est égale à la somme des courants qui sortent.
Deuxième loi de Kirchoff (Loi des mailles) : Le long de toute maille d'un réseau électrique, à tout instant, la somme algébrique des tensions est nulle. (Une maille est un parcours fermé de branches passant au plus une seule fois par un nœud donné.)

Ensuite en étudiant seulement la “topologie“ du système et à l'aide des rappels précédents nous pouvons obtenir de manière automatique les équations différentielles régissant le circuit (voir pour plus de détails [2]). Celles-ci se présentent sous la forme:

$$E\dot{x} = Ax + f(t),$$

où x est un vecteur du type $(u_1, u_2, u_3, i_1, i_2, i_3)$ s'il n'y a que trois dipoles dans notre circuit électrique, E et A sont des matrices à coefficients constants (les R, L et C de chaque dipole).
Ainsi les circuits électriques sont modélisés à l'aide de DAE linéaire à coefficients constants.
Evidemment nous pouvons imaginer intégrer à notre circuit un composant vérifiant une relation non linéaire du type $u = f(t, i)$ et dans ce cas la modélisation ne donnera plus quelque chose de linéaire.

1.3. **Pendule simple, et navette spatiale.** L'exemple le plus classique de DAE provient de l'étude du pendule simple (voir [2, 7, 8, 10]). Cette fois-ci nous n'obtiendrons pas un système linéaire.
Nous allons étudier l'équation du mouvement d'une masse m suspendue au bout d'un fil (de masse négligeable et de longueur l). La masse est écartée de son état d'équilibre puis lachée, on cherche alors l'équation de ce mouvement.
Si nous utilisons "l'astuce" classique qui est de ramener le problème à l'étude de l'angle θ que fait le fil avec la verticale alors le problème se ramène à une ODE d'ordre 2. Si nous n'utilisons pas cette astuce et que nous écrivons les équations de la physique dans un repère orthonormée d'origine l'extrémité fixe du fil alors nous avons:

$$\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} m\ddot{x} + 2x\lambda = 0, \\ m\ddot{y} + 2y\lambda + mg = 0, \end{array}\right\} & \text{partie différentielle} \\ x^2 + y^2 - l^2 = 0, & \text{partie algébrique} \end{array}\right.$$

où g est la gravité à la surface de la Terre et λ est une variable représentant la tension du fil.

En posant $X = (x, y, \lambda, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\lambda})$, le système ci-dessus est bien du type $F(t, X, \dot{X}) = 0$. Ici, encore nous sommes face à une DAE. De plus cet exemple permet de justifier l'appelation DAE. En effet nous remarquons que nous avons une partie différentielle mais aussi une partie algébrique.

Pour les problèmes physiques sous contraintes les DAE sont souvent présentes. En effet, la loi $\sum \vec{F_i} = m\ddot{X}$ donne la partie différentielle et la contrainte, comme ici $x^2 + y^2 - l^2 = 0$ donne la partie algébrique.

Un exemple de ce type de problème apparait lorsque nous étudions l'entrée dans l'atmosphère d'une navette spatiale. Dans ce cas, une trajectoire est imposée pour éviter que la fusée ne s'enflamme (conditions algébriques). Puis on veut étudier la vitesse de la navette sur cette trajectoire (conditions différentielles).

Pour en finir avec la physique voici un dernier exemple. Lorsque l'on veut étudier le mouvement d'un système physique, une équation différentielle (d'ordre 2 le plus souvent) apparait. Lorsque l'on rajoute les lois de conservation de l'energie, il vient alors une contrainte qui donne la partie algébrique d'une DAE.

1.4. **Équations de Van der Pol et perturbations.** *"I have a theory that whenever you want to get in trouble with a method, look for the Van der Pol equation."* (P.E. Zadunaisky 1982, Zadunaisky est un mathématicien et astronome argentin, un astéroïde porte son nom en son honneur...)

Balthasar van der Pol (1889-1959) est un physicien qui a laissé son nom à l'oscillateur suivant (il a aussi laissé son nom à un planétoïde...):

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

où μ est un paramètre. Ce type d'équation décrit l'évolution d'un système électrique non linéaire.
De manière simplifiée nous pouvons voir cette équation comme l'équation simple : $\ddot{x} + x = 0$ dont les solutions sont périodiques et perturbées par un frottement $x^2 - 1$. Ce frottement est positif si $|x| > 1$. Donc dans ce cas le mouvement est freiné. Le frottement est négatif si $|x| < 1$. Donc dans ce cas le mouvement est amplifié. Donc assez intuitivement nous nous attendons à ce le mouvement finisse par devenir périodique.

Nous voulons comprendre le comportement des solutions lorsque μ tend vers l'infini.

L'équation de van der Pol se réécrit:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2, \\ \dot{x_2} = \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1 \end{cases}$$

En posant $t = s/\mu$, $y_1(s) = x_1(t)$, $y_2(s) = \mu x_2(t)$, $\mu^2 = 1/\epsilon$ on obtient:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = y_2, \\ \epsilon\dot{y_2} = (1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{cases}$$

L'objectif à présent est de comprendre le comportement du système précédent (c'est une ODE) lorsque ϵ tend vers 0. (Numériquement ce problème est difficile, on dit que c'est un *problème raide*). On peut alors brutalement poser $\epsilon = 0$ et on obtient alors une DAE.

De manière plus générale, la modélisation de certains système nous amène à une ODE du type suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \epsilon\dot{y} = g(x, y), \quad 0 < \epsilon \ll 1 \end{cases}$$

Sous certaines hypothèses, nous pouvons écrire:

$$\begin{cases} x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \cdots + \epsilon^n x_n(t) + O(\epsilon^{n+1}) \\ y(t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \epsilon^2 y_2(t) + \cdots + \epsilon^n y_n(t) + O(\epsilon^{n+1}) \end{cases}$$

En substituant ces expressions dans l'équation précédente, et en identifiant les puissances de ϵ nous avons en particulier:

$$\begin{cases} \dot{x_0} = f(x_0, y_0), \\ 0 = g(x_0, y_0). \end{cases}$$

Ainsi même si nous ne voulons qu'une solution au premier ordre en ϵ nous devons résoudre une DAE. (Evidemment, si nous voulons tous les x_i et y_i pour $i = 1, \ldots, n$ nous obtenons une DAE plus compliquée.)

1.5. **Cinétique chimique.** La cinétique chimique donne aussi naissance à des DAE.
Le problème est le suivant : nous faisons réagir différents produits entre

eux. Chaque substance réagit avec une autre et donne naissance à une autre substance qui peut à son tour réagir avec les substances présentes. Chaque réaction se fait à des vitesses différentes. Par exemple A réagit avec B et donne C, C réagit avec B et donne A et les réactions se font à des vitesses différentes. A l'instant t quelle est la concentration de chaque substance? Après modélisation, nous obtenons une DAE.

1.6. **Encore des mathématiques.** Certaines méthodes numériques nécessitent de suivre des chemins. Par exemple pour trouver les racines d'un système polynomial une méthode est la suivante:
Soient $F_0, F_1 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ deux applications polynomiales. F_0 est une application polynomiale dont on sait calculer facilement ses racines. Autrement dit, on choisit F_0 afin de pouvoir trouver rapidement ses racines.
L'objectif est de trouver les racines de F_1, pour cela nous étudions l'homotopie nous faisant passer de F_0 à F_1 :

$$F(t, x) = (1 - t)F_0(x) + tF_1(x).$$

Nous avons $F(0, x) = F_0(x)$ et $F(1, x) = F_1(x)$.
L'idée pour trouver les racines de F_1 est la suivante:
Nous allons suivre les racines de $F(t, x)$. Autrement dit, à la place de chercher les racines de F_1 directement nous allons chercher les racines $x(t)$ du système polynomial $F(t, x)$. Et les racines de F_1 seront alors les valeurs $x(1)$.
Nous voulons donc résoudre le problème : $F(t, x) = 0$.
Nous imposons ensuite que les chemins allant des racines $x(0)$ aux racines $x(1)$ soient "lisses", c'est à dire la dérivée $\dot{x}$ est non nulle. Nous pouvons alors les paramétrer par l'abscisse curviligne, c'est à dire nous imposons $\|\dot{x}\|^2 = 1$. En notant $x = (x_1, \dots, x_n)$ nous avons alors à résoudre:

$$\begin{cases} \dot{x}_1^2 + \cdots + \dot{x}_n^2 = 1, \\ F(t, x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Nous avons donc une DAE. Une racine $(y_0, \dots, y_n)$ de F_0 donne une condition initiale, qui donne après résolution de la DAE une racine $(z_1, \dots, z_n)$ de F_1. C'est à dire $(z_1, \dots, z_n) = (x_1(1), \dots, x_n(1))$.

Remarque: La résolution des systèmes polynomiaux est un problème mathématiques important qui a des applications, notamment en robotique.

2. Un premier cas (simple?...)

2.1. **Formes canoniques pour les DAE linéaire à coefficients constants.** L'étude de l'ODE $\dot{x} = Ax + f(t)$ avec A une matrice à coefficients constants, se fait en diagonalisant ou en réduisant sous forme de Jordan la matrice A. Le cas le plus simple pour une DAE est aussi le cas linéaire et il se présente sous la forme:

$$E\dot{x} = Ax + f(t),$$

avec E et A deux matrices à coefficients constants, et E non inversible. Dans ce cas l'étude se mène en étudiant le faisceau de matrices $E+\lambda A$. Autrement dit, nous voulons réduire le couple de matrices (E, A). Lorsque $\det(E-\lambda A)$ n'est pas le polynôme identiquement nul on dit que le couple (E, A) est régulier et nous pouvons montrer que le couple (E, A) est équivalent au couple suivant:

$$(E, A) \sim \left(\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right),$$

où I est la matrice identité, J est une matrice de Jordan sous sa forme canonique et N est une matrice de Jordan sous sa forme canonique.

Cela généralise la reduction des matrices. En effet, si E est la matrice identité alors le bloc avec la matrice nilpotente N disparait.
Lorsque qu'un couple est réduit de la façon précédente on dit qu'il est sous forme de Kronecker canonique.
L'intérêt de cette réduction est que l'on a découplé le problème en deux. En notant $x = (x_1, x_2)$, $f = (f_1, f_2)$ avec x_1, f_1 correspondant au premier bloc de la reduction et x_2, f_2 au second, nous avons:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Jx_1 + f_1(t), \\ N\dot{x}_2 = x_2 + f_2(t). \end{cases}$$

Ainsi nous voyons que le premier bloc donne naissance à une ODE et le second à une équation d'une forme très particulière. Il nous reste donc à étudier uniquement cette seconde équation. Nous allons voir que l'indice de nilpotence de N joue alors un très grand rôle.

2.2. **Influence de l'indice de nilpotence sur le second membre.** On appelle indice de nilpotence de la matrice N le nombre entier ν tel que $N^\nu = 0$ et $N^{\nu-1} \neq 0$.
Nous voulons résoudre l'équation $N\dot{x} = x + f(t)$, avec N nilpotente d'indice ν.
Cela se réécrit de la manière suivante:

$$\begin{aligned} x &= N\dot{x} - f \\ &= N(N\dot{x} - f)' - f = N^2\ddot{x} - N\dot{f} - f \\ &= N^2(N\dot{x} - f)'' - N\dot{f} - f = N^3x^{(3)} - N^2 f^{(2)} - N\dot{f} - f \\ &= N^{\nu-1}x^{(\nu-1)} - \sum_{i=0}^{\nu-2} N^i f^{(i)} \\ &= N^\nu x^{(\nu)} - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i f^{(i)} \\ &= -\sum_{i=0}^{\nu-1} N^i f^{(i)}. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons une formule explicite pour la solution.
De plus cette formule nous montre que pour qu'une solution existe, il faut que f soit $\nu - 1$ fois dérivable. Cela donne donc une condition sur le second membre.
Enfin pour la résolution du problème avec condition initiale nous remarquons

que la seule condition $x(t_0) = -\sum_{i=0}^{\nu-1} N^i f^{(i)}(t_0)$ *donne une solution et que celle-ci est unique.*

2.3. **Les méthodes explicites ne conviennent pas.** Nous allons rappeler deux méthodes classiques pour les ODE. Nous essaieront ensuite de généraliser ces méthodes pour les DAE.
Lorsque nous voulons résoudre numériquement l'ODE $\dot{x} = F(t, x)$, nous écrivons:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_0) &= F(t_0, x(t_0)), \\ \frac{x(t_1) - x(t_0)}{h} &\approx F(t_0, x(t_0)), \end{aligned}$$

avec $t_1 = t_0 + h$.
Ce qui donne $x(t_1) \approx x(t_0) + hF(t_0, x(t_0))$.

On aboutit à la méthode d'Euler explicite:

$$x_1 = x_0 + hF(t_0, x_0).$$

L'idée ici a été de remplacer $\dot{x}(t_0)$ par $\frac{x(t_1) - x(t_0)}{h}$. Regardons ce que cela donne dans le cadre des DAE linéaire à coefficients constant.

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t_0) &= Ax(t_0) + f(t_0), \\ E\left(\frac{x(t_1) - x(t_0)}{h}\right) &\approx Ax(t_0) + f(t_0). \end{aligned}$$

Cela donne naissance au schéma : $Ex_1 = Ex_0 + hAx_0 + hf(t_0)$.
Or E est non inversible, donc nous ne pouvons pas obtenir x_1 à partir de x_0.
La méthode d'Euler explicite est un cas particulier de méthode de Runge-Kutta. Nous montrerons que *nous ne pouvons pas utiliser de méthodes de Runge-Kutta explicites* pour résoudre numériquement une DAE.

Regardons alors ce qui se passe avec la méthode d'Euler implicite.
Dans ce cas l'idée est de remplacer $\dot{x}(t_1)$ (et non pas $\dot{x}(t_0)$ comme pour la méthode explicite) par son développement limité à l'odre 1. Cela donne pour l'ODE $\dot{x} = F(t, x)$ le schéma

$$x_1 = x_0 + hF(t_1, x_1).$$

Dans ce cas la méthode semble moins pratique. Pour obtenir x_1, nous devons résoudre une équation tandis que dans la méthode explicite nous avons une formule qui nous donne directement x_1 en fonction de x_0. Cependant la méthode implicite est plus stable que la méthode explicite. Nous allons voir qu'elle possède aussi l'avantage de pouvoir s'adapter aux DAE.

Remplaçons $\dot{x}(t_1)$ par $(x(t_1) - x(t_0))/h$ dans $E\dot{x} = Ax + f(t)$. On obtient:

$$Ex(t_1) \approx Ex(t_0) + hAx(t_1) + hf(t_1).$$

Ce qui donne le schéma:

$$(E - hA)x_1 = Ex_0 + hf(t_1).$$

A présent il faut noter que l'hypothèse (E, A) régulier nous avait permis d'obtenir la réduction sous forme de Kronecker. Mais cette hypothèse permet aussi de montrer que la solution au problème avec condition initiale est unique. Donc nous essaierons de résoudre numériquement que des DAE qu'avec des couples (E, A) réguliers. Comme (E, A) régulier signifie $\det(E-\lambda A)$ non identiquement nul, on a alors $E-hA$ inversible pour presque toutes les valeurs de h sauf un nombre fini. Nous pouvons donc en pratique choisir un pas h afin de résoudre l'équation: $(E - hA)x_1 = Ex_0 + f(t_1)$.
La méthode d'Euler implicite permet donc de résoudre des DAE.

2.4. **Chute (possible) de l'ordre d'une méthode.** Maintenons que nous savons que la méthode d'Euler implicite permet de résoudre des DAE, regardons la précision, c'est à dire l'ordre de cette méthode. Concrètement cela signifie que nous allons étudier l'écart entre la solution théorique et la solution approchée donnée par la méthode. On pose $x(t_0) = x_0$ et nous allons donc donner un ordre de grandeur pour $x(t_1) - x_1$.

Pour étudier l'ordre de la méthode d'Euler implicite nous allons nous restreindre aux cas de la DAE: $N\dot{x} = x + f(t)$, avec N nilpotente d'indice ν. (On peut toujours se ramener à ce cas grace à la decomposition sous forme de Kronecker.)
Dans ce cas, nous avons:

$$(N - hI)x_1 = Nx_0 + hf(t_1).$$

La solution exacte vérifie

$$N\left(\frac{x(t_1) - x(t_0)}{h} + \frac{h}{2}\ddot{x}(\eta)\right) = x(t_1) + f(t_1),$$

avec $\eta \in [t_0, t_1]$. (Nous avons appliqué la formule de Taylor-Lagrange.) Cela donne:

$$(N - hI)x(t_1) = Nx(t_0) + hf(t_1) - N\frac{h^2}{2}\ddot{x}(\eta).$$

On en déduit:

$$(N - hI)(x_1 - x(t_1)) = N\frac{h^2}{2}\ddot{x}(\eta).$$

Ensuite un calcul direct montre que l'inverse de $N - hI$ est $-\frac{1}{h}\sum_{i=0}^{\nu-1}\frac{N^i}{h^i}$.
On aboutit alors à:

$$x_1 - x(t_1) = -\sum_{i=0}^{\nu-1}\frac{N^{i+1}}{2h^{i-1}}\ddot{x}(\eta) = O\left(\frac{1}{h^{\nu-2}}\right).$$

Donc pour $\nu = 2$ nous avons un problème: la méthode ne converge pas lorsque h tend vers 0. C'est à dire l'écart entre la solution théorique et la solution approchée ne diminue pas lorsque l'on diminue le pas h.
Pire encore, lorsque $\nu > 2$ l'erreur augmente!!!

3. Un cas plus général

3.1. **Avec le théorème des fonctions implicites.** Revenons au cas général et à l'équation $F(t,x,\dot{x})=0$.
Comme pour les ODE nous pouvons toujours nous ramener à étudier une équation autonome en rajoutant l'équation $\dot{t}=1$ et en posant $X=(t,x)$. Nous étudions alors une équation du type $f(X,\dot{X})=0$. Lorsque $\partial_{\dot{X}}f$ est inversible nous pouvons appliquer le théorème des fonctions implicites. Nous obtenons alors $\dot{X}=\varphi(x)$ qui est une ODE. Donc d'un point de vue théorique ce cas ne pose pas de problèmes.

Il reste à se convaincre que nous pouvons calculer la fonction implicite φ afin de pouvoir résoudre numériquement l'ODE $\dot{X}=\varphi(X)$.
Nous proposons ici un méthode simple et dans l'esprit du cours. Cette preuve remonte à Augustin-Louis Cauchy. L'idée est la suivante nous allons montrer que φ est solution d'une ODE. Donc cela montre que φ existe et qu'il existe des moyens numériques pour la calculer.
Nous cherchons φ telle que $f(X,\varphi(X))=0$. En dérivant nous obtenons: $\partial_X f(X,\varphi(X))+\partial_{\dot{X}}f(X,\varphi(X)).\dot{\varphi}(X)=0$. Ainsi $\varphi(X)$ vérifie l'ODE:

$$\dot{\varphi}(X)=-\frac{\partial_X f(X,\varphi(X))}{\partial_{\dot{X}}f(X,\varphi(X))}.$$

Ainsi en appliquant un méthode numérique pour résoudre l'ODE ci-dessus, nous pouvons calculer $\varphi(X)$. Ensuite connaissant $\varphi(X)$ nous pouvons résoudre numériquement $\dot{X}=\varphi(X)$.

3.2. **Et sinon?** Que faire lorsque $\partial_{\dot{X}}f$ n'est pas inversible?
Dans le cas simple des équations linéaires à coefficients constants $E\dot{X}=AX+f(t)$ cela signifie que E est non inversible.
Nous avons vu que dans le cas des DAE linéaires à coefficients constants, nous pouvions découpler le problème en une ODE et une équation du type: $N\dot{X}=X+f(t)$, avec N nilpotente d'indice ν. Seule la dernière équation posait un problème pour la résolution car ce n'était pas une ODE. Cependant nous avons tout de même trouvé la solution pour cette équation. Elle s'exprime de la manière suivante:

$$X(t)=-\sum_{i=0}^{\nu-1}N^i f^{(i)}(t).$$

Cela donne:

$$\dot{X}(t)=-\sum_{i=0}^{\nu-1}N^i f^{(i+1)}(t).$$

Cela signifie qu'en combinant ν différentiations de l'équation de départ nous pouvons obtenir une ODE.
Nous avions déjà vu que l'indice de nilpotence ν jouait une role primordial dans la résolution des DAE aussi bien sur le plan théorique que numérique. Cette dernière remarque signifie grossièrement que “l'indice de nilpotence mesure de combien on est loin d'une ODE”.
Cette idée de dériver plusieurs fois jusqu'à obtenir une ODE fonctionne

aussi dans le cas général. Le nombre de différentiations nécessaires s'appelle *l'indice de différentiation.* Nous venons de voir que dans le cas des DAE linéaires à coefficients constants l'indice de différentiation est égal à l'indice de nilpotence.
Pour conclure nous allons calculer sur l'exemple du pendule simple l'indice de différentiation.
Rappelons que l'équation régissant le mouvement du pendule simple est:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2x\lambda = 0, \\ m\ddot{y} + 2y\lambda + mg = 0, \\ x^2 + y^2 - l^2 = 0. \end{cases}$$

Pour alléger les notations on pose $p = (x, y)$ (c'est la position du pendule) et $v = (\dot{x}, \dot{y})$ (c'est la vitesse du pendule). On a $\dot{p} = v$. Comme $m \neq 0$ la partie différentielle de cette équation peut se réécrire

$$(\dot{p}, \dot{v}) = (v, f(p, v, \lambda)).$$

La présence du λ nous pose un problème. En effet sans lui nous aurions une ODE. Pour faire apparaitre une ODE (et donc du $\dot{\lambda}$) nous allons effectuer trois dérivations.
Une première dérivation de la condition algébrique donne:

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0.$$

Avec nos notations on obtient:

$$< p, v >= 0.$$

Ce qui signifie que la vitesse du pendule est orthogonale à sa position. On dérive une deuxième fois et on obtient:

$$\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0.$$

On substitue dans cette dernière équation $\ddot{x} = -2x\lambda/m$, et $\ddot{y} = -2y\lambda/m - g$. (C'est la première et la deuxième équation de la partie différentielle de la DAE de départ.)
On obtient:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x(-2x\lambda/m) + y(-2y\lambda/m - g) = 0.$$

C'est à dire:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - gy - 2\lambda\frac{(x^2 + y^2)}{m} = 0.$$

Cela donne:

$$2\lambda\frac{l^2}{m} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - gy.$$

En dérivant une troisième fois on obtient:

$$\dot{\lambda} = \frac{m}{2l^2}\left(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} - g\dot{y}\right).$$

Ainsi $\dot{\lambda}$ dépend de v et de $\dot{v}$ cela donne $\dot{\lambda} = h(v, \dot{v})$.
Conclusion: Après 3 dérivations et diverses subsitutions nous obtenons l'ODE suivante:

$$(\dot{p}, \dot{v}, \dot{\lambda}) = (v, f(p, v, \lambda), h(v, f(p, v, \lambda)).$$

L'équation du pendule a donc un indice de différentiation égal à 3.

4. Méthode de Newton

Les méthodes numériques que nous allons étudier sont des méthodes implicites. Ainsi nous serons amenés à devoir résoudre des équations du type $f(x) = 0$. Un outil simple et performant pour résoudre ce type de problème est la méthode de Newton. Cette méthode consiste à fabriquer la suite $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$. L'inconvénient de cette méthode itérative est le choix du point de départ x_0. Dans les cours de niveau élémentaire on montre que si x_0 est suffisamment proche de la solution $\hat{x}$ vérifant $f(\hat{x}) = 0$ alors la suite (x_k) converge vers $\hat{x}$.
Evidemment en pratique cela pose des problèmes. En effet si nous cherchons $\hat{x}$ il est difficile de savoir si nous sommes près de lui ou pas.
Il n'est pas possible d'avoir un moyen calculatoire permettant de décider si la suite (x_k) converge. Autrement dit, le problème de savoir si pour un x_0 donné la suite (x_k) converge est indécidable (voir [1] pour une définition précise d'indécidabilité dans ce contexte). Cependant nous pouvons écrire des théorèmes donnant une condition suffisante pour la convergence de la suite. Lorsque ces conditions sont exprimées en fonction de x_0 uniquement on dit que nous avons un α-théorème. L'α-théorie est une théorie récente, développée dans les années 1980, par S. Smale. (S. Smale a été médaille Fields en 1966 pour ces travaux sur la conjecture de Poincaré.)
Nous présentons ici un théorème "à la Kantorovitch" dans le cadre d'une fonction d'une variable réelle. Ce résultat est extrait du livre [9] traitant des ODE.

Théorème 2. *Soit f une fonction d'une variable deux fois continûment dérivable, x_0 un réel, et supposons $f'(x_0) \neq 0$. On pose*

$$\begin{aligned} h_0 &= -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \\ x_1 &= x_0 + h_0, \\ J_0 &= [x_1 - |h_0|, x_1 + |h_0|], \\ M &= \sup_{x \in J_0} |f''(x)|. \end{aligned}$$

Si x_0 est tel que

$$2\left|\frac{f(x_0)M}{f'(x_0)^2}\right| < 1,$$

alors :

- *l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique dans J_0,*
- *la méthode de Newton avec x_0 pour point initial converge vers cette racine de manière quadratique.*

Ce genre de théorème n'est pas un α-théorème à cause de la quantité M qui fait intervenir une borne supérieure sur tout un intervalle. Cependant, ce type de théorème donne aussi une condition suffisante pour la convergence de la méthode de Newton, et c'est là son intérêt.

Preuve. Posons $h_1 = -f(x_1)/f'(x_1)$. Nous allons tout d'abord estimer h_1, $f(x_1)$ et $f(x_1)$. Tout d'abord, l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned}
|f'(x_1)| &\geq |f'(x_0)| - |f'(x_1) - f'(x_0)| \\
&\geq |f'(x_0)| - M|x_1 - x_0| = |f'(x_0)| - M\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right| \\
&\geq |f'(x_0)| - \frac{|f'(x_0)|}{2} \\
&\geq \frac{1}{2}|f'(x_0)|. \, (\star)
\end{aligned}$$

Pour majorer $f(x_1)$ nous effectuons une intégration par parties:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f'(x)dx \\
&= f(x_0) - \big[(x_1 - x)f'(x)\big]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)f''(x)dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - x)f''(x)dx.
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $th_0 = x_1 - x$ et on obtient:

$$|f(x_1)| \leq M|h_0|^2 \int_0^1 tdt = \frac{M|h_0|^2}{2}. \, (\star\star)$$

Les inégalités $(\star)$ et $(\star\star)$ donnent alors:

$$|h_1| = \left|\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right| \leq \frac{M|h_0|^2}{2}.\left|\frac{2}{f'(x_0)}\right| < \frac{|h_0|}{2},$$

et

$$\left|\frac{f(x_1)M}{f'(x_1)^2}\right| \leq \left|\frac{h_1 M}{f'(x_1)}\right| \leq M\frac{|h_0|}{2}.\frac{2}{|f'(x_0)|} = M\left|\frac{f(x_0)}{f'(x_0)^2}\right|.$$

En posant $x_2 = x_1 + h_1$ et $J_1 = [x_2 - |h_1|, x_2 + |h_1|]$, on voit que $J_1 \subset J_0$, et que les hypothèses que l'on avait faites sur x_0, h_0 et J_0 restent vérifiées par x_1, h_1 et J_1. On peut donc itéter le processus, en posant

$$h_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \text{et} \quad x_{k+1} = x_k + h_k.$$

Tous les points x_k appartiennent à J_0 et forment une suite convergente, puisque la série $h_0 + h_1 + \cdots$ converge.

La limite $\hat{x} = \lim x_k$ est solution de $f(x) = 0$, puisque

$$\lim x_{k+1} = \lim x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow \hat{x} = \hat{x} - \frac{f(\hat{x})}{f'(\hat{x})},$$

car f et f' sont continues.

Pour la convergence quadratique il suffit de remarquer que nous avons montré

$$h_1 \leq \frac{M|h_0|^2}{2}.\left|\frac{2}{f'(x_0)}\right|.$$

Cela donne

$$|h_{k+1}| \leq \frac{M}{|f'(x_k)|}|h_k|^2 \leq C|h_k|^2,$$

avec $C = \sup_{J_0} \dfrac{M}{|f'(x)|}$ qui est bien défini car f' est continue.

$\square$

5. Plan du cours

(1) Equations différentielles algébriques linéaires à coefficients constants (DAELC).
   (a) Forme canonique
   (b) Inverse de Drazin
   (c) Représentation explicite des solutions
(2) Méthodes numériques pour les DAELC
   (a) Rappel sur les méthodes numériques pour les ODE
   (b) Méthodes de Runge-Kutta pour les DAELC
   (c) Rappel sur les méthides multi-pas pour les ODE
   (d) Méthode BDF pour les DAELC
(3) Equations différentielles algébriques linéaires à coefficients variables
   (a) Forme canonique
   (b) Indice d'étrangeté
(4) Cas général
   (a) Forme canonique
   (b) Méthode numérique (méthode de Newton et α-théorie)

References

[1] Lenore Blum, Felipe Cucker, Michael Shub, and Steve Smale. *Complexity and real computation*. Springer-Verlag, New York, 1998.

[2] K. E. Brenan, S. L. Campbell, and L. R. Petzold. *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*, volume 14 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1996. Revised and corrected reprint of the 1989 original.

[3] J.-P Dedieu. *Points Fixes, Zéros et la Méthode de Newton*, volume 54 of *Mathématiques et Applications 54*. SMAI-Springer Verlag, 2006.

[4] M. Giusti, G. Lecerf, B. Salvy, and J.-C. Yakoubsohn. On location and approximation of clusters of zeros of analytic functions. *Found. Comput. Math.*, 5(3):257–311, 2005.

[5] M. Giusti, G. Lecerf, B. Salvy, and J.-C. Yakoubsohn. On location and approximation of clusters of zeros: case of embedding dimension one. *Found. Comput. Math.*, 7(1):1–49, 2007.

[6] E. Hairer, S. P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations. I*, volume 8 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1993. Nonstiff problems.

[7] E. Hairer and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations. II*, volume 14 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1996. Stiff and differential-algebraic problems.

[8] Ernst Hairer, Christian Lubich, and Michel Roche. *The numerical solution of differential-algebraic systems by Runge-Kutta methods*, volume 1409 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] B. Hubbard, J. et West. *Equations différentielles et systèmes dynamiques*, volume 2 of *Enseignement des Mathématiques*. Cassini, 1999.

[10] Peter Kunkel and Volker Mehrmann. *Differential-algebraic equations*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2006. Analysis and numerical solution.

Institut de Mathématiques de Toulouse, Université Paul Sabatier, 31 062 TOULOUSE cedex 9, France
E-mail address: guillaume.cheze@math.ups-tlse.fr
E-mail address: yak@math.ups-tlse.fr